# וקטורים

## הגדרה

וקטור הוא קבוצה של מספרים ממשיים מסודרים. כל איבר ממוספר מ-1 עד n, כאשר n הוא מספר האיברים בוקטור, יכול להיות מ-1 ועד אינסוף. גודל הוקטור נקרא גם מימד, "וקטור בעל מימד n".

סימון: u = (u1, u2, u3, …, un) כאשר ui ∈ 𝐑 (1≤i≤n). ui נקרא "רכיב" של הוקטור u.

## פעולות על וקטורים

### סכום וקטורים

סכום וקטורים הוא וקטור שרכיביו הם סכומים של רכיבי הוקטורים המחוברים בהתאמה. כלומר:

אם: u = (u1, u2, u3, …, un), v = (v1, v2, v3, …, vn) .

אז: u + v = (u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3, …, un + vn).

סכום של וקטורים ממימדים שונים אינו מוגדר.

### מכפלה של וקטור בסקלר

מכפלת וקטור בסקלר הוא וקטור שרכיביו הם כפולות בסקלר של רכיבי הוקטור המוכפל. כלומר:

אם: u = (u1, u2, u3, …, un) , k ∈ 𝐑

אז: ku = (ku1, ku2, ku3, …, kun)

### מכפלה סקלרית

היא מכפלה בין שני וקטורים או יותר בעלי אותו מימד, התוצאה של המכפלה היא סקלר שהוא סכום מכפלות רכיבי הוקטורים המוכפלים בהתאמה.

אם: u = (u1, u2, u3, …, un) , v = (v1 ,v2, v3, …, vn)

אז: u ∙ v = u1∙v1 + u2∙v2 + u3∙v3 + ⋯ + un∙vn = ?

### תכונות של מכפלה סקלרית ושל וקטורים

יהיו u, v, w ∈ 𝐑n וקטורים, ויהי k ∈ R סקלר. אז מתקיים:

א. חוק החילוף (קומוטטיביות) - u ∙ v = v ∙ u

ב. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) - (ku) ∙ v = k(u ∙ v)

ג. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) - u + v) ∙ w = u ∙ w + v ∙ w )

## סוגי וקטורים

### שוויון וקטורים

שני וקטורים u, v נקראים שווים כלומר u = v אם הם בעלי אותו מימד ואם כל רכיביהם שווים בהתאמה.

### וקטור ה-0

וקטור האפס הוא וקטור שכל רכיביו הם אפסים. כלומר: .(0, 0, 0, …, 0)

### וקטורים אורתוגונליים (ניצבים)

שני וקטורים נקראים ניצבים אם מכפלתם הסקלרית שווה 0 .

## מרחק, אורך ונורמה של וקטור

### מרחק בין וקטורים

מרחק בין וקטורים ב- 𝐑n הוא השורש של סכום ריבועי ההפרשים של כל רכיבי הוקטורים בהתאמה.

אם: u = (u1, u2, u3, …, un), v = (v1, v2, v3, …, vn) .

אז: [distance(u, v) = √[(u1 – v1)2 + (u2 – v2)2 + (u3 – v3)2 + ⋯ + (un – vn)2

### נורמה (אורך) של וקטור

אורך של וקטור ב- 𝐑n הוא שורש סכום ריבועי רכיביו.

אם: (u = (u1, u2, u3, …, un.

אז: u‖ = √(u ∙ u) = √[u12 + u22 + u32 + ⋯ + un2 ] ‖ (סימון לאורך של וקטור).

הערה: המרחק בין וקטורים הוא גם אורך וקטור ההפרש בין הוקטוריםd(u, v) = ‖u − v‖ .

### וקטור יחידה

הוא וקטור שאורכו הוא 1. כלומר, e הוא וקטור יחידה אם מתקיים: ‖e‖ = 1.

# מרחבים וקטוריים

## שדה מספרים

הוא קבוצה של מספרים מסוג מסוים. יכולים להיות אינספור שדות של מספרים משום שאפשר לקבוע אינספור הגדרות שונות לאילו מספרים אנו רוצים להכניס לשדה. מקובל לסמן שדה באמצעות האות F (Field). השדות הבסיסיים הם:

1. קבוצת המספרים הטבעיים - N
2. קבוצת המספרים השלמים - Z
3. קבוצת המספרים הרציונליים - Q
4. קבוצת המספרים הממשיים - R
5. קבוצת המספרים המרוכבים - C

בקורס זה נשתמש או בקבוצת המספרים הממשיים R או בקבוצת המספרים המרוכבים C.

## מרחב וקטורי

מרחב וקטורי S (Space) מעל שדה F (Field), הוא קבוצה של וקטורים שמוגדרות עליהם פעולות חיבור וכפל באברי השדה (סקלרים ממשיים R, או מרוכבים C), כך שלכל הוקטורים השייכים למרחב הוקטורי u, v, w ∈ S ולכל הסקלרים השייכים לשדה k1 ,k2 ∈ F , מתקיימים תשעת התנאים הבאים:

1. סגירות לחיבור: אם u, v ∈ S אזי גם u + v ∈ S .
2. סגירות לכפל בסקלר: אם u, v ∈ S ו-k ∈ F סקלר אזי גם k∙u ∈ S .
3. חוק החילוף (קומוטטיביות): u + v = v + u.
4. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לחיבור: (u + v) + w = u + (v + w).
5. קיום איבר ניטרלי לחיבור, כלומר קיים איבר ב- S הנקרא "0" והמקיים:u + 0 = u לכל .u ∈ S במילים אחרות, המרחב S מכיל בתוכו את וקטור ה-0 באותו גודל .(0, 0, 0, …, 0) -
6. קיים איבר נגדי לחיבור, כלומר לכל u ∈ S קיים איבר -u ∈ S המקיים: u + (−u) = 0 .
7. סקלר היחידה, קיים איבר 1 ∈ F המקיים: 1 x u = u לכל u ∈ S .
8. חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לכפל בסקלר: (k1∙k2)u = k1(k2∙u)
9. חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות): k1 + k2)u = k1∙u + k2∙u)

k(u + v) = k∙u + k∙v

אם ידוע לנו כי S הוא מרחב וקטורי אנו יכולים להניח כי מתקיימים בו כל תשעת תנאים אלו.

### המרחב הוקטורי הבסיסי

המרחבים הוקטוריים הבסיסיים הם מרחבים שהתנאי היחידי להיכלל בהם הוא שיש להם מספר רכיבים מסוים והם נמצאים מעל שדה המספרים הממשיים. מרחב וקטורי שיש לו רק רכיב אחד יקרא R1, ומרחב וקטורי שיש לו שני רכיבים יקרא , R2 וכו' עד n - (R1, R2, R3, …, Rn).

## תת מרחב

קבוצת איברים מתוך המרחב הוקטורי המהווה בעצמה מרחב וקטורי נקראת תת מרחב (W). תת מרחב הוא מרחב לכל דבר וגם בו מתקיימים כל תשעת התנאים שהזכרנו. אולם כדי לוודא שמרחב מסוים הוא תת מרחב אין צורך לבדוק את כל תשעת התנאים, אלא מספיק לוודא שלושה תנאים שאם מתקיימים בוודאי שגם כל השאר מתקיימים. שלושת תנאים אלו הם:

1. תת המרחב W מכיל בתוכו את וקטור ה-0 באותו גודל .(0, 0, 0, …, 0) -
2. סגירות לחיבור: אם u, v ∈ W אזי גם u + v ∈ W .
3. סגירות לכפל בסקלר: אם u, v ∈ W ו- k ∈ F סקלר אזי גם k∙u ∈ W .

אם שלושת תנאים אלו מתקיימים נוכל לקבוע בוודאות כי W הוא תת מרחב. בדרך כלל בתרגילים שנקבל המרחב הוקטורי W יהיה תת מרחב של Rn כלשהו שנמצא מעל שדה המספרים הממשיים.

### הצגה של תת מרחב

ישנן שתי אפשרויות של הצגה של תתי מרחבים:

1. מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות - נחלק לשני סוגים:
2. הצגה בסיסית של תת מרחב: {מערכת משוואותW = {( x1, x2, …, xn) ∈ Rn |

החלק השמאלי מתאר את גודלו של תת המרחב וסוגם של הערכים שנמצאים בו. בנוסף, כל רכיב בתת מרחב מקבל שם של משתנה. בצד הימני יש מערכת משוואות המהווה את התנאים שהרכיבים השייכים ל-W מקיימים, לדוגמא: x1 = x2 = x3.

1. הצגה באמצעות פרמטרים:𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n) ∈ Rn} ) | מערכת משוואות פרמטרית} W =

דומה להצגה בסעיף א', אלא שכאן מייצגים כל רכיב באמצעות מערכת משוואות של פרמטרים כלשהם, לדוגמא: (2𝛼1, 𝛼2 + 𝛼2, 𝛼1, -𝛼2). בצד ימין מתארים את סוגם של הפרמטרים בהם השתמשנו.

1. הצגה של תת מרחב באמצעות הוקטורים הפורשים אותו: W = span (w1, w2, …, wn).

## צירוף ליניארי

### הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה סקלרים F, ויהיו הוקטורים v1, v2, …, vn ∈ V. אזי כל וקטור ב- V מהצורה k1∙v1 + k2∙v2 + ⋯ + kn∙vn כאשר k1, k2, …., kn ∈ F, נקרא צירוף ליניארי של הוקטורים v1, v2, …, vn.

צירוף ליניארי הוא בעצם תהליך של יצירת וקטור מתוך מספר וקטורים מהמרחב המוכפלים בסקלר. לאחר שנוצר וקטור זה, נאמר שהוא צירוף ליניארי של כל הוקטורים בהם השתמשנו ליצור אותו.

### האם וקטור הוא צירוף ליניארי

בחלק מן התרגילים יתנו לנו וקטור v ועוד מספר וקטורים v1, v2, …, vn, וישאלו האם הוקטור v הוא צירוף ליניארי של שאר הוקטורים?

לצורך כך נכפיל כל וקטור במשתנה אחר x1, x2, …, xn. נחבר את כל הרכיבים שבאותו המקום, וניצור מערכת משוואות שהפתרונות שלה הם רכיבי הוקטור v. נדרג את המטריצה וננסה למצוא את הפתרון של כל המשתנים. במידה ויש פתרון יחיד, נוכל לקבוע כי הוקטור v הוא צירוף ליניארי של שאר הוקטורים המתקבל מהמשוואה v = x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn . במידה ואין פתרון יחיד, נאמר שהוקטור v הוא אינו צירוף ליניארי של שאר הוקטורים.

### כתיבת וקטור כצירוף ליניארי

בחלק מן התרגילים יתנו לנו וקטור v ועוד מספר וקטורים v1, v2, …, vn, ויאמרו לנו לכתוב את וקטור v בתור צירוף ליניארי של שאר הוקטורים הנתונים.

לצורך כך נעשה בדיוק את אותה הפעולה כמו בסעיף קודם, ולאחר שנדרג את המטריצה ונמצא את המשתנים, נרשום כך v = x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn .

## תלות ליניארית

### הגדרה

נתונים n וקטורים v1, v2, …, vn, השייכים למרחב וקטורי V. הוקטורים נקראים תלויים ליניארית, אם קיימים n סקלרים **שלא כולם שווים ל-0** המקיימים: x1∙v1 + x2∙v2 + ⋯ + xn∙vn = 0. כלומר שעל ידי מכפלה סקלרית כלשהי של כל אחד מהוקטורים יש אפשרות שנקבל את וקטור ה-0 (0, 0, 0, …, 0), במידה וכן נקבע כי הוקטורים v1, v2, …, vn תלויים ליניארית.

אחרת, כלומר אם האפשרות היחידה שהמשוואה תהיה נכונה היא כאשר כל המקדמים שווים ל-0, הוקטורים נקראים בלתי תלויים ליניארית.

מושג התלות הליניארית קשור למושג צירוף ליניארי. אם הוקטורים תלויים ליניארית זאת אומרת שאפשר לכתוב כל אחד מהוקטורים הללו כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים, ולכן אגב הם נקראים תלויים ליניארית.

אם אחד הוקטורים, נניח v1 , הוא וקטור האפס, אזי תמיד הוקטורים יהיו תלויים ליניארית לפי הגדרה זו. שכן: k∙v1 + 0∙v2 + ⋯ + 0∙vn = 0, כאשר k יכול להיות כל מספר אפשרי, ולכן הם תלויים ליניארית משום שלא כל המקדמים שווים ל-0.

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 1

ישנם שתי שיטות לבדוק האם מספר וקטורים v1, v2, …, vn הם תלויים ליניארית. בשיטה הראשונה נכפיל כל וקטור במשתנה אחר x1, x2, …, xn. נחבר את כל הרכיבים שבאותו המקום, וניצור מערכת משוואות הומוגנית (שהפתרונות של כל המשוואות שלהם שווה ל-0). נדרג את המטריצה וננסה למצוא את הפתרונות של כל המשתנים.

במידה ומתקבל שלמטריצה יש אינסוף פתרונות או שיש פתרון יחיד ואחד מהמשתנים שונים מ-0, נוכל לקבוע כי הוקטורים v1, v2, …, vn הם תלויים ליניארית. במידה ומתקבל פתרון יחיד שבו כל המשתנים שווים ל-0, נוכל לקבוע כי הוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית. במערכת משוואות הומוגנית אין אפשרות שהתוצאה תהיה "אין פתרון".

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 2

ניתן לבדוק תלות ליניארית בין וקטורים בדרך נוספת המחליפה את הצורך בפתרון מערכת משוואות.

רושמים את הוקטורים הנתונים בעמודות או בשורות ללא פתרונות, ומדרגים את המטריצה. אם מגיעים למטריצה שיש בה שורת אפסים - אז הוקטורים תלויים ליניארית. אם לא ניתן להגיע לשורה של אפסים - אז הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

### בדיקת תלות ליניארית – שיטה 3

שמים את כל הוקטורים במטריצה בתור עמודות ובודקים מהי הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת. כאשר דטרמיננטה שווה ל-0 זה אומר שיש תלות ליניארית, וכאשר דטרמיננטה שונה מ-0 אז הוקטורים בלתי תלויים ליניארית.

## בסיס ומימד

### בסיס

מרחב וקטורי V יקרא בעל מימד n אם ישנם n וקטורים v1, v2, …, vn בלתי תלויים ליניארית שפורשים (span) את V, כלומר שכל וקטור ב- V יכול להיכתב כצירוף ליניארי שלהם. במקרה זה קבוצת הוקטורים {v1, v2, …, vn} נקראת "בסיס למרחב הוקטורי".

במילים אחרות, "בסיס" של מרחב V הוא קבוצת כל הוקטורים המקיימים שני תנאים:

1. קבוצת הוקטורים פורשת את המרחב V, כלומר שבאמצעותם יכולים לבנות על ידי צירוף ליניארי את כל הוקטורים ב-V. במקרה זה נרשום: V = span (v1, v2, …, vn)
2. קבוצת הוקטורים v1, v2, …, vn הם בלתי תלויים ליניארית. תנאי זה הוא הכרחי משום שוקטורים התלויים לינארית פירושו שניתן להציג כל וקטור בהם באמצעות צירוף לינארי של הוקטורים האחרים, כלומר שיש וקטור מיותר. ולכן אם אנו רוצים לקבל את מינימום הוקטורים הפורשים את המימד עליהם להיות בלתי תלויים לינארית.

### מימד

"המימד" הוא מספר הוקטורים בבסיס. את המימד מסמנים באמצעות המילה "dim" (dimension): dimV = n. המימד מייצג כמה חופש יש להגדרת הוקטור, אם המימד 0 - סימן שיש רק וקטור אחד ויחיד שהוא בעצם נקודה. אם המימד אחד - יש חופש רק למשתנה אחד שהוא בעצם קו, כמו הוקטור v = (1, x). אם המימד שניים - יש חופש לשני משתנים, כמו הפונקציות המוכרות לנו של x ו-y. אם המימד שלוש - יש חופש לשלושה משתנים ואז מתקבל מרחב תלת מימדי כמו העולם שלנו. וכן הלאה ארבעה וחמישה מימדים.

**הערה** - לכל מרחב / תת מרחב יכולים להיות מספר רב של בסיסים אך המימד תמיד יהיה מספר קבוע.

### מימד ובסיס למרחב הוקטורי הבסיסי

למרחבים הוקטוריים הבסיסיים שהתנאי היחידי להיכלל בהם הוא שיש להם n רכיבים (R1, R2, R3, …, Rn), מאוד קל למצוא בסיס ומימד.

המימד הוא לפי מספר הרכיבים n של אותו מרחב וקטורי dimV = n. והבסיס יהיה n וקטורים שבכל אחד יהיה רכיב אחר השווה ל-1 וכל השאר אפסים. וקטורים אלו הם בלתי תלויים ליניארית וניתן לבנות באמצעותם כל וקטור בעל n רכיבים.

v1  = (1, 0, 0, …, 0); v2 = (0, 1, 0, …, 0); v3 = (0, 0, 1, …, 0); ⋯ ; vn = (0, 0, 0, …, 1).

### כללים חשובים

כאשר ידוע לנו מהו המימד של מרחב וקטורי V dimV = n)), ישנם שלושה כללים מאוד חשובים המייצגים את הקשר שבין התלות הליניארית לבסיס המרחב:

1. מספר הוקטורים בבסיס תמיד יהיה שווה לגודל המימד (n).
2. כל n + 1 וקטורים או יותר הם תלויים ליניארית.
3. כל n וקטורים בלתי תלויים ליניארית מהווים בסיס. לכן אם ידוע לנו גודל המימד ונתון לנו קבוצת וקטורים באותו גודל, ושואלים האם קבוצת הוקטורים היא בסיס לתת מרחב, כל שעלינו לעשות הוא לוודא שהוקטורים הם בלתי תלויים ליניארית והם בוודאי יהיו גם בסיס למרחב.

### מציאת בסיס ומימד

השיטה למציאת בסיס ומימד לתת מרחב משתנה בהתאם לדרך שבה מוצג התת מרחב (סעיף ג').

1. מרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגניות - מחולק לשני סוגים:
2. הצגה בסיסית של תת מרחב: {מערכת משוואותW = {( x1, x2, …, xn) ∈ Rn |

מציבים את מערכת המשוואות במטריצה ומחשבים את ערכם של x1, x2, …, xn באמצעות פרמטרים. מוצאים איך נראה וקטור ב-W. מפרקים וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.

**הערה** - גודל המימד יהיה כמספר האיברים המובילים החופשיים.

1. מוצאים איך נראה וקטור ב-W. מפרקים וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם ומציבים במטריצה. לבסוף, מדרגים את המטריצה. כל השורות שנשארו שאינם שורת אפסים הם בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.
2. הצגה של תת מרחב באמצעות הוקטורים הפורשים אותו: W = span (w1, w2, …, wn).

מציבים במטריצה את כל הוקטורים הנתונים שפורשים את W, כל וקטור הוא שורה נפרדת, ומדרגים. כל השורות שנשארו שאינם שורת אפסים הם בלתי תלויים ליניארית ולכן מהווים בסיס ל-W ומספרם הוא המימד.

## תרגילים שונים

### מציאת מערכת משוואות של תת מימד

מבין שלושת הצורות של הצגת תת מרחב, רק באחת מהן (1-א) נתונה מערכת המשוואות של התת מרחב כבר מהתחלה. לכן בהצגות האחרות (1-ב, ו-2) אחת השאלות שיכולים לשאול היא "מצא את מערכת המשוואות של התת מרחב".

כדי למצוא את מערכת המשוואות ניקח את וקטורי הבסיס ונכפיל כל אחד במשתנה אחר 𝛼1, 𝛼2, …, 𝛼n. נשווה אותם לוקטור שבו יהיו כל משתני התת מרחב W - x1, x2, …, xn. התוצאה תהיה מערכת משוואות שהפתרונות שלה הם רכיבי התת מרחב. נעביר את המערכת למטריצה ונדרג.

נחפש מהם התנאים אשר לפיהם לערכים של רכיבי התת מרחב יוצא שלמטריצה זו יש פתרון. נשווה אותם ל-0, ונקבל מערכת משוואות הומוגנית שהיא מערכת המשוואות של תת מרחב W.

**הערה** - כשהמימד של התת מרחב קטן מהמימד של הבסיס הטבעי Rn, הפרש זה יתבטא במספר המשוואות של התת מרחב. **מספר משוואות | Rn | - dim(v) =.** לדוגמא: בתת מרחב בו גודל הוקטורים הוא 3 והמימד הוא 2, מספר המשוואות יהיה 3-2=1.

### מציאת וקטור משותף

שאלה נוספת שאפשר לשאול היא "מצא וקטור השייך לשני תתי מרחב שונים U ו-W מאותו סדר גודל". כדי שוקטור מסוים יהיה שייך לשני תתי מרחב שונים הוא צריך לקיים את מערכת המשוואות של שניהם. על כן, ניקח את כל המשוואות נציב במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. וקטור זה הוא וקטור השייך לשני המרחבים U ו-W.

### תת מרחב מוכל בתת מרחב אחר

כדי לבדוק האם תת מרחב U מוכל בתת מרחב אחר V, נבדוק האם הבסיס של U מקיים את המשוואה שמגדירה את V. כלומר נציב את הבסיס במשוואה. במידה והמשוואה נכונה נאמר ש-U מוכל בתוך V.

במידה וגם גודל המימדים שלהם שווים, נאמר ששני תתי המרחב שווים.

### וקטור אורתוגונלי לתת מרחב

שני וקטורים נקראים "אורתוגונליים" (ניצבים) אם מכפלתם הסקלרית שווה 0 . כדי למצוא וקטור ניצב לתת מרחב W, צריך למצוא וקטור שהמכפלה הסקלרית שלו עם כל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב שווה ל-0.

לכן ניקח וקטור של משתנים x1, x2, …, xn בגודל של התת מרחב ונכפיל אותו בכל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב ונשווה ל-0, מה שייתן לנו מערכת של משוואות, אותה נציב במטריצה (המשמעות של פעולה זו היא בעצם לקחת את כל וקטורי הבסיס ולהציבם כשורות במטריצה). נדרג את המטריצה ונמצא את הערכים של המשתנים x1, x2, …, xn.. נציב את כל הערכים שקיבלנו בוקטור, והוא יהיה הוקטור האורתוגונלי לתת מרחב. בדרך כלל יהיו פרמטרים a1, a2 וכו', לכן נציב ערך כלשהו של הפרמטרים ונקבל וקטור של מספרים שהוא אורתוגונלי לתת מרחב W.

לבסוף נבצע בדיקה אם הוקטור שמצאנו הוא אכן ניצב לתת מרחב, על ידי שנכפיל את הוקטור בכל אחד מוקטורי הבסיס של התת מרחב, ונוודא שבכל אחד יוצא 0.

## חיתוך של תתי מרחבים

נתונים שני תתי מרחבים U ו-W השייכים ל- Rn. החיתוך של שני תתי מרחבים אלו - V הוא גם תת מרחב השייך ל- Rn המקיים את מערכת המשוואות של שני תתי המרחבים במקביל. חיתוך של תתי מרחבים הוא בעצם תת מרחב השייך גם לU וגם ל-W.

כדי למצוא בסיס ומימד לU ו-W נמצא מערכת משוואות ל-U ומערכת משוואות ל-W, ניקח את כל המשוואות ונציבם ביחד במטריצה ונדרג. נמצא את הפתרונות של כל רכיבי המרחבים x1, x2, …, xn, ונציבם בוקטור אחד. כך נמצא וקטור המקיים את התנאים של U וגם את התנאים של W. נפרק וקטור זה לפי מספר הפרמטרים שבו כאשר כל וקטור מוכפל בפרמטר אחר. לוקחים את הוקטורים בלבד ללא הפרמטרים שלהם. וקטורים אלו הם בסיס לחיתוך של תתי המרחבים (V) ומספרם הוא המימד.}

## סכום ישר של תתי מרחבים

אם החיתוך של שני תתי המרחבים U ו-W, שנקרא לו V, הוא וקטור ה-0 ((0, 0, 0, …, 0, מה שאומר שגם המימד שלו שווה ל-0 (dimV = 0), אז הסכום של U + W הוא "סכום ישר". במקרה של סכום ישר מתקיימת הנוסחה: dimU + dimW = dim(U + W). כלומר המימד של תת המרחב U + W שווה לחיבור של המימדים שלהם בנפרד. אם (u1, u2, u3, …, un) הוא הבסיס של תת המרחב U, ו- (w1, w2, w3, …, wn) הוא הבסיס של תת המרחב W, אז הבסיס של תת המרחב U + W הוא: u1, u2, u3, …, un, w1, w2, w3, …, wn)), כלומר אין וקטורים מיותרים.

## חיבור מרחבים

אם U ו-W מרחבים וקטוריים אז:

1. האיחוד של שני המרחבים לא יהיה מרחב אלא אם כן אחד מוכל בשני, שאז נקבל פשוט את המרחב הגדול מבניהם.
2. U + W יהיה מרחב וקטורי, גודל המימד הוא:dim(u + w) = dim(u) + dim(w) - dim(uw) .